

## §1. БАНКИ: КРЕДИТ С ТАБЛИЦЕЙ

### ПРИМЕР 1

15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,5 млн рублей. Условия его возврата следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $p$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $p$  – целое число;
- выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0

Найдите наименьшее значение  $p$ , при котором Алексею в общей сумме придётся выплатить больше 2,2 млн рублей.

### РЕШЕНИЕ:

Пусть  $S_n$  — сумма, которую Алексей выплачивает в  $n$ -м месяце кредитования. Также для удобства произведём замену:  $k = 1 + \frac{p}{100}$ . Таким образом, начисление процентов производится умножением текущей суммы долга на коэффициент  $k$ . Выплата подбирается так, чтобы долг на начало следующего месяца соответствовал требованиям (данным из таблицы). Очевидно, что выплата должна равняться разности между текущим долгом и долгом на начало следующего месяца. Для удобства просто дополним таблицу, приведённую в условии задачи ещё парой строк. Итак, пусть следующая строка отражает сумму долга (в текущий месяц) после начисления процентов, а последняя строка - сумму, которую следует выплатить в текущем месяце:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0
Долг после начисления %	$1,5k$	$1,2k$	$1k$	$0,7k$	$0,5k$	$0,3k$	
Выплата	$S_1=1,5k-1,2$	$S_2=1,2k-1$	$S_3=1k-0,7$	$S_4=0,7k-0,5$	$S_5=0,5k-0,3$	$S_6=0,3k$	

Тогда  $S_1 = 1,5k - 1,2$  (изначальный долг в 1,5 млн рублей увеличится в  $k$  раз, а во втором месяце на счете должно остаться 1,2 млн рублей).

Аналогично:  $S_2 = 1,2k - 1$ ;  $S_3 = 1k - 0,7$ ;  $S_4 = 0,7k - 0,5$ ;  $S_5 = 0,5k - 0,3$  и  $S_6 = 0,3k$ .

Общая сумма выплат составляет:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 5,2k - 3,7.$$

В соответствии с условием задачи имеем:

$$5,2k - 3,7 > 2,2.$$

Вспомним, что  $k = 1 + \frac{p}{100}$ , и решим неравенство:

$$5,2 + \frac{5,2p}{100} - 3,7 > 2,2 \Leftrightarrow \frac{5,2p}{100} > 0,7 \Leftrightarrow p > \frac{175}{13}.$$

Наименьшее целое решение:  $p = 14$ .

Ответ: 14%.

### 1.1

В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2030	Июль 2031	Июль 2032	Июль 2033	Июль 2034
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Ответ:

**1.2**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039	Июль 2040
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,8S$	$0,5S$	$0,1S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Ответ:

**1.3**

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

- Первого числа месяца долг увеличивается на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $p$  — целое число.
- Со 2 по 14 число необходимо выплатить часть долга.
- 15 числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее  $p$ , при котором сумма выплат будет меньше 1,2 млн руб.

Ответ:

**1.4**

В июле 2031 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере  $S$  млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2031	Июль 2032	Июль 2033	Июль 2034	Июль 2035
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,9S$	$0,7S$	$0,3S$	0

Определите сумму кредита  $S$ , при которой общая сумма выплат будет равна 129 млн рублей.

Ответ:

**1.5**

В июле 2032 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 50% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2032	Июль 2033	Июль 2034	Июль 2035	Июль 2036
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,3S$	$0,2S$	$0,1S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 36 млн рублей.

Ответ:

**1.6**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.

Ответ:

**1.7**

В июле 2039 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2039	Июль 2040	Июль 2041	Июль 2042
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,7S$	$0,3S$	0

Найдите наименьшее  $S$ , при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.

Ответ:

**1.8**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,6S$	$0,25S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Ответ:

**1.9**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке в размере  $S$  тыс. рублей, где  $S$  — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039
Долг (в тыс. рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Ответ:

**ПРИМЕР 2**

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
<b>Долг (в процентах от кредита)</b>	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

**РЕШЕНИЕ:**

Пусть сумма кредита будет 100 руб. (именно 100 руб. только для удобства вычислений, т.к. от суммы кредита не зависит процентное превышение) и будем считать, что выплаты производились 10 числа каждого месяца. Составим таблицу выплат:

Дата	14.02	14.03	14.04	14.05	14.06	14.07
<b>Долг, руб. (после начисления %)</b>	105	94,5	84	73,5	63	52,5
<b>Выплата, руб.</b>	15	14,5	14	13,5	13	52,5
<b>Остаток долга на день выплаты, руб.</b>	90	80	70	60	50	0
<b>Остаток долга на день выплаты, %</b>	90%	80%	70%	60%	50%	0%

Тем самым, полная сумма выплат (третья строка таблицы) равна  $15 + 14,5 + 14 + 13,5 + 13 + 52,5 = 122,5$  руб., что составляет 122,5% от изначальной суммы в 100 руб. Переплата составила 22,5%.  
 Ответ: 22,5%.

**1.10**

15-го января был выдан кредит. В таблице представлен график его погашения

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
<b>Долг (в процентах от кредита)</b>	100%	80%	60%	40%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 10%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ:

**1.11**

В начале 2021 года был выдан кредит. В таблице представлен график его погашения

Дата	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028
<b>Долг (в процентах от кредита)</b>	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	0%

В конце каждого года, начиная с 2021, текущий долг увеличивался на 20%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого года, начиная с 2022. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ:

**1.12**

В начале 2021 года был выдан кредит на три года. В таблице представлен график его погашения

Дата	2021	2022	2023	2024
<b>Долг (в процентах от кредита)</b>	100%	50%	25%	0%

В конце каждого года, начиная с 2021, текущий долг увеличивался на 50%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого года, начиная с 2022. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ:

## §2. БАНКИ: АННУИТЕТНЫЕ ПЛАТЕЖИ

### ПРИМЕР 1

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:  
 — каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;  
 — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

### РЕШЕНИЕ:

Пусть искомая сумма составляет  $S$  рублей, а  $x = 69\,690\,821$  рубль. Тогда:

*Вся таблица состоит из долгов!*

№ года	Долг в начале года	Долг после начисления %	Долг после выплаты
1	$S$	$1,31S$	$1,31S - x$
2	$1,31S - x$	$1,31(1,31S - x)$	$1,31(1,31S - x) - x$
3	$1,31(1,31S - x) - x$	$1,31(1,31(1,31S - x) - x)$	$1,31(1,31(1,31S - x) - x) - x$

После всех выплат долг должен быть полностью погашен (последняя ячейка равна 0 рублей). Составим уравнение:  $1,31(1,31(1,31S - x) - x) - x = 0$ .

Заменим  $x = 69\,690\,821$ :

$$1,31(1,31(1,31S - 69\,690\,821) - 69\,690\,821) - 69\,690\,821 = 0.$$

$$S = 124\,809\,100$$

Ответ: 124 809 100 рублей.

### 2.1

1 марта 2020 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

Ответ:

### 2.2

31 декабря 2021 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Ярослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ:

### Примечание.

Увеличить число на 12,5% – то же самое, что умножить это число на  $9/8$ .

### 2.3

В июле 2038 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Ответ:

**2.4**

В июле 2022 года был взят кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78 030 рублей больше суммы взятого кредита.

Ответ:

**2.5**

В июле 2021 года был взят кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами и общая сумма выплат на 156 060 рублей больше суммы взятого кредита.

Ответ:

**2.6**

Георгий взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Ответ:

**2.7**

31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк  $X$  рублей. Какой должна быть сумма  $X$ , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ:

**2.8**

31 декабря 2021 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплат кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк  $x$  рублей. Какой должна быть сумма  $x$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ:

**2.9**

Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270 200 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

Ответ:

**2.10**

В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года.

Ответ:

**2.11**

Взяли кредит 177 120 рублей в банке на четыре года под 25% годовых и выплатили четырьмя равными платежами.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита?

Ответ:

**2.12**

В июле 2032 года планируется взять кредит на сумму 419 375 рублей. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ:

**2.13**

Светлана Михайловна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 4 420 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 10%. Светлана Михайловна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

Ответ:

**2.14**

Взяли кредит в банке на сумму 250 000 рублей под  $p\%$  процентов годовых и выплатили за 2 года платежами 150 000 рублей в первый год и 180 000 рублей — во второй. Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.15**

Четырёхлетний мальчик взял в долг у старшего товарища 30 конфет. Его меркантильный товарищ согласился дать ему эти конфеты при условии, что мальчик «завтра» вернёт 13 конфет, а «послезавтра» ещё 22 конфеты. Если бы дети знали, что их договор это кредит с определённой процентной ставкой в день, то какой была бы эта процентная ставка при данных условиях?

Ответ:

**2.16**

Взяли кредит в банке на сумму 200 000 рублей под  $p\%$  процентов годовых и выплатили за 2 года платежами 130 000 рублей в первый год и 150 000 рублей — во второй. Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.17**

Если бы ты взял(а) кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей под  $X$  процентов годовых и выплачивал(а) бы его за 2 года платежами 450 000 рублей в первый год и 630 000 рублей — во второй, то какая процентная ставка ( $X$  процентов годовых) была бы прописана в договоре?

Ответ:

**2.18**

Один наивный человек взял в кредит у какой-то сомнительной финансовой организации 5 000 рублей. По договору он должен ровно через неделю выплатить в счёт долга 4 500 рублей и ещё через неделю выплатить 9 500 рублей. Почему, когда он выходил из офиса, ему вслед смеялись сотрудники этой финансовой организации? Под сколько процентов в неделю был взят кредит?

Ответ:

**2.19**

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк  $3/4$  от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Ответ:

**2.20**

Ольга хочет взять кредит в 100 000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей?

Ответ:

**Примечание.**

Чтобы количество лет было минимальным необходимо, чтобы размер выплат был максимальным. Поэтому ежегодные выплаты должны составлять 24 тыс. руб. Тогда в конце года оставшаяся сумма долга умножается на величину 1,1, а после начисления процентов долг уменьшается на 24 тыс. руб. Задача решается арифметически.

**2.21**

Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Тимофей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не больше 270 тысяч рублей?

Ответ:

**2.22**

1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Ответ:

**2.23**

1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

Ответ:

**Примечание.**

Процентная ставка очень низкая. Следовательно, начисляемая сумма тоже будет небольшой.

**2.24**

31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Ответ:

**2.25**

31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите  $a$ .

Ответ:

**2.26**

В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.27**

В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый год долг увеличивается на  $p\%$ ;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за четыре года равными платежами по 777 600 рублей, или за два года равными платежами по 1 317 600 рублей.

Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.28**

В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый год долг увеличивается на  $p\%$ ;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за четыре года равными платежами по 56 507 рублей, или за два года равными платежами по 103 207 рублей.

Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.29**

В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $p\%$ ;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 56 595 рублей, или за два года равными платежами по 81 095 рублей.

Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.30**

В августе 2017 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $p\%$ ;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 38 016 рублей, или за два года равными платежами по 52 416 рублей.

Найдите  $p$ .

Ответ:

**2.31**

31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Ответ:

**2.32**

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Ответ:

**2.33**

В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Ответ:

**2.34**

В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ:

## ПОВТОРЕНИЕ

**1**

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $p$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $p$  – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $p$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Ответ:  $p = 7$ .

**2**

1 января 2021 года был выдан новогодний кредит. В таблице представлен график его погашения

Дата	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь	2022
Долг (в % от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	1%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 1%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ: на 5,56%.

### §3. БАНКИ: ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ПЛАТЕЖИ

#### ПРИМЕР 1

Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

#### РЕШЕНИЕ:

Пусть сумма кредита  $S$  у.е., процентная ставка банка  $x\%$ .

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает, что Антон взятую сумму возвращал в банк так:

- равными долями основную часть долга;
- различными долями начисленные банком проценты на текущий остаток долга.

*Вся таблица состоит из выплат!*

№ месяца	Выплата части основного долга	Выплата начисленных процентов
1	$\frac{S}{6}$	$S \cdot \frac{x}{100}$
2	$\frac{S}{6}$	$\left(S - \frac{S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100}$
3	$\frac{S}{6}$	$\left(S - \frac{2S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100}$
4	$\frac{S}{6}$	$\left(S - \frac{3S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100}$
5	$\frac{S}{6}$	$\left(S - \frac{4S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100}$
6	$\frac{S}{6}$	$\left(S - \frac{5S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100}$

Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$\begin{aligned}
 & S \cdot \frac{x}{100} + \left(S - \frac{S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100} + \left(S - \frac{2S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100} + \dots + \left(S - \frac{5S}{6}\right) \cdot \frac{x}{100} = \\
 & = S \cdot \frac{x}{100} + \frac{5S}{6} \cdot \frac{x}{100} + \frac{4S}{6} \cdot \frac{x}{100} + \dots + \frac{S}{6} \cdot \frac{x}{100} = S \cdot \frac{x}{100} \cdot \left(1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) = \\
 & = S \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{1 + \frac{1}{6}}{2} \cdot 6 = 0,035Sx.
 \end{aligned}$$

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев:

$$S + 0,035Sx = (1 + 0,035x)S.$$

А эта сумма по условию задачи равна  $1,63S$  у.е.

Решим уравнение:  $(1 + 0,035x)S = 1,63S$

$$1 + 0,035x = 1,63$$

$$0,035x = 0,63$$

$$x = 18$$

Ответ: 18%.

**3.1**

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $p$ .

Ответ:

**3.2**

Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется  $p\%$  этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите  $p$ .

Ответ:

**3.3**

15-го января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $p$ .

Ответ:

**3.4**

15 января Антон взял в кредит 3 миллиона рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца;
- 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $p$ .

Ответ:

**3.5**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $x\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите  $x$ , если известно, что наибольший платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

Ответ:

**3.6**

15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 2,34 млн рублей?

Ответ:

**3.7**

15 сентября планируется взять кредит в банке на 12 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,26 млн рублей?

Ответ:

**3.8**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн рублей?

Ответ:

**3.9**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 0,24 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся).

Ответ:

**3.10**

Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита?

Ответ:

**3.11**

Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

Ответ:

**3.12**

15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку в первые 12 месяцев?

Ответ:

**3.13**

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Ответ:

**3.14**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

Ответ:

**3.15**

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн рублей?

Ответ:

**3.16**

В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит 1,8 млн рублей?

Ответ:

**3.17**

В январе планируется взять кредит в банке на некоторое количество лет. Условия его возврата таковы:

- 1-го января каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с 1-го февраля по 30-е ноября каждого года необходимо выплатить часть долга;
- 1-го декабря каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 1-е декабря предыдущего года.

На сколько лет можно взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита будет в два раза больше суммы, взятой в кредит.

Ответ:

**3.18**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?

Ответ:

**3.19**

15-го декабря был взят кредит в банке на 600 000 рублей на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 25 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 26 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составил долг на 15 число 25 месяца, если всего было выплачено 691 000 рублей?

Ответ:

**3.20**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 700 тысяч рублей на  $(n+1)$  месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по  $n$ -й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа  $n$ -го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
- к 15-му числу  $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите  $n$ , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 755 тысяч рублей.

Ответ:

**3.21**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Ответ:

**3.22**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на  $(n + 1)$  месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по  $n$ -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа  $n$ -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу  $(n + 1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите  $p$ , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Ответ:

**3.23**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

Ответ:

**3.24**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1198 тысяч рублей?

Ответ:

**3.25**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1407 тысяч рублей?

Ответ:

**3.26**

Ваня взял в июле кредит на 600 тыс. рублей на 10 лет под 13% годовых (каждый январь долг возрастал на 13% по сравнению с концом предыдущего года). В июле каждого года долг становился на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Однако ровно через пять лет выплат по этому кредиту он познакомился с умным человеком Романом, который помог ему снизить процентную ставку на 1%. Таким образом, в каждом январе последующих пяти лет долг возрастал на 12% по сравнению с концом предыдущего года. Через 10 лет долг был полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

Ответ:

**3.27**

В июле 2035 года планируется взять кредит на 100 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2036, 2037, 2038, 2039 и 2040 годов долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2041, 2042, 2043, 2044 и 2045 годов долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2045 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

Ответ:

**3.28**

В июле 2030 года планируется взять кредит на 1,6 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2031, 2032, 2033 и 2034 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2035, 2036, 2037 и 2038 годов долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2038 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?

Ответ:

**3.29**

В июле 2032 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:  
— в январе 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2036, 2037 и 2038 годов долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2038 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно  $p$ , если общая сумма выплат составит 984 тыс. рублей?

Ответ:

**3.30**

В июле 2032 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:  
— в январе 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2036, 2037 и 2038 годов долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2038 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно  $p$ , если общая сумма выплат составит 840 тыс. рублей?

Ответ:

**3.31**

В июле этого года планируется взять кредит на 1,8 млн рублей. Условия его возврата таковы:  
— в каждом январе следующих трёх лет долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с декабрём предыдущего года;

— в каждом январе ещё трёх лет долг возрастает на 10% по сравнению с декабрём предыдущего года;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— после шести лет ежегодных выплат долг должен быть полностью погашен.

Чему равно  $p$ , если общая сумма выплат составит 2,88 млн рублей?

Ответ:

**3.32**

В июле планируется взять кредит на 1,6 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— в каждом январе следующих четырёх лет долг возрастает на  $p\%$  (процентная ставка) по сравнению с концом предыдущего года;

— затем процентная ставка на последующие четыре года уменьшается в пять раз и в каждом январе этих четырёх лет долг возрастает на уже уменьшенную процентную ставку;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— через восемь лет долг должен быть полностью погашен.

Чему равна начальная процентная ставка  $p$ , если сумма всех выплат составит 3 миллиона рублей?

Ответ:

**3.33**

Если ты будешь плохо готовиться к ЕГЭ, то не поступишь на бюджет и придётся брать кредит на обучение. Кредит на 100 условных единиц на пять лет выдаётся на следующих условиях:

— в январе первого года долг возрастает на 5% (процентная ставка);

— затем процентная ставка увеличивается на 5% каждый год (то есть 10%, 15%, 20% и 25%);

— в июле каждого года долг уменьшается равномерно;

— через пять лет долг должен быть полностью погашен.

Сколько всего денег (в условных единицах) тебе придётся заплатить банку за всё время?

Ответ:

## ПОВТОРЕНИЕ

**1**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  – **целое** число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Ответ:  $S = 11$ .

**2**

1 марта 2020 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

Ответ: 1 923 000 рублей.

**3**

Георгий взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 133 100 рублей.

**4**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1200 тысяч рублей на  $(n+1)$  месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по  $n$ -й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа  $n$ -го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
- к 15-му числу  $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите  $p$ , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.

Ответ: 1%.

**5**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1407 тысяч рублей?

Ответ: 400 тысяч рублей.

## §4. БАНКИ: ГИБРИДНЫЕ ПЛАТЕЖИ

**ПРИМЕР 1 (на сравнение)**

Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.

По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).

По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи). Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?

**РЕШЕНИЕ:** Рассмотрим первую схему. Пусть  $x$  руб. – искомая фиксированная сумма

Который отчетный месяц?	Долг к концу месяца с учетом начисленных процентов (руб.)	Анатолий переводит в банк (руб.)	Долг Анатолия на начало следующего месяца (руб.)
Первый	$331000 \cdot 1,1 = 364100$	$x$	$364100 - x$
Второй	$(364100 - x) \cdot 1,1 = 400510 - 1,1x$	$x$	$400510 - 2,1x$
Третий	$(400510 - 2,1x) \cdot 1,1 = 440561 - 2,31x$	$x$	$440561 - 3,31x$

$$440561 - 3,31x = 0 \Leftrightarrow 3,31x = 440561 \Leftrightarrow x = 133100 \Rightarrow 3x = 399300.$$

Теперь рассмотрим вторую схему.

Который отчетный месяц?	Анатолий должен перевести в банк		
	Часть кредита по основному долгу (руб.)	Процентные ставки банка	Всего (руб.)
Первый	$\frac{331000}{3}$	$331000 \cdot 0,1 = 33100$	$\frac{331000}{3} + 33100 = \frac{430300}{3}$
Второй	$\frac{331000}{3}$	$\frac{331000 \cdot 0,1 \cdot 2}{3} = \frac{66200}{3}$	$\frac{331000}{3} + \frac{66200}{3} = 132400$
Третий	$\frac{331000}{3}$	$\frac{331000 \cdot 0,1}{3} = \frac{33100}{3}$	$\frac{331000}{3} + \frac{33100}{3} = \frac{364100}{3}$

Итак, если Анатолий воспользуется второй схемой, то он в банк должен будет вернуть сумму, равную  $\frac{430300}{3} + 132400 + \frac{364100}{3} = \frac{794400}{3} + 132400 = 397200$ .

А эта сумма меньше, чем 399300, на 2100 руб.

Ответ: Выгодна вторая схема. На 2100 рублей.

**4.1 (на сравнение)**

Андрей планирует 15-го декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 1 655 000 рублей. Банк предложил Андрею два различных плана погашения кредита, их описание приведено в табл.

План 1	—каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; —с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; —кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	—1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего; —со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; —15-го числа каждого месяца с 1-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; —15-го числа 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрею банку по более выгодному плану погашения кредита?

Ответ:

**ПРИМЕР 2**

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

**РЕШЕНИЕ:**

Обозначим через  $S$  размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по  $0,2S$  млн. Всего  $0,6S$  за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до  $1,2S$  млн. Обозначим через  $x$  размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен  $1,2S - x$ , а в середине 5-го года он равен  $1,2S(1,2S - x)$ . В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна  $1,2S(1,2S - x)$  и по условию равна  $x$ . Значит,

$$1,2(1,2S - x) = x \Leftrightarrow 2,2x = 1,44S \Leftrightarrow x = \frac{144}{220}S = \frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен:

$$0,6S + \frac{72}{55}S = \frac{105}{55}S = \frac{21}{11}S.$$

По условию:

$$\frac{21}{11}S > 10 \Leftrightarrow 21S > 110 \Leftrightarrow S > \frac{110}{21}$$

$$S > 5\frac{5}{21}$$

При  $S = 6$  это неравенство верно, а при  $S = 5$  оно неверно, как и при меньших  $S$ .  
 Ответ: 6 млн рублей.

**4.2**

- В июле 2036 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года.
  - с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
  - в июле 2037, 2038 и 2039 годов долг остаётся равным 4,2 млн. руб.
  - суммы выплат 2040 и 2041 годов равны.

Найдите  $p$ , если долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 6,1 млн. рублей.

Ответ:

**4.3**

- В июле 2036 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года.
  - с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
  - в июле 2037, 2038 и 2039 годов долг остаётся равным 6,6 млн. руб.
  - суммы выплат 2040 и 2041 годов равны.

Найдите  $p$ , если в 2041 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.

Ответ:

**4.4**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере  $S$  тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2037, 2038 и 2039 долг остаётся равным  $S$  тыс. рублей;
- выплаты в 2040 и 2041 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2041 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Ответ:

**4.5**

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

Ответ:

**ПРИМЕР 3**

Банк выдал кредит на 10 000 000 рублей сроком на 4 года под 50% годовых. Первый год и второй год кредит выплачивается равными ежегодными платежами (один платёж в год после начисления процентов). Третий год и четвёртый год кредит выплачивается так, чтобы долг был на одну и ту же величину меньше, чем долг на начало предыдущего года. Общая сумма выплат оказалась равной 20 375 000 рублей. Какого размера (в рублях) был самый первый платёж?

**РЕШЕНИЕ:**

По условию задачи в первые два года (1 и 2) - аннуитетные платежи, а в последующие два года (3 и 4) - дифференцированные платежи. Составим таблицу для первых двух лет. Пусть  $S = 10\,000$  тыс. рублей. Здесь удобно использовать в качестве единиц измерения тысячи рублей.

№ года	Долг до начисления % (в начале года, тыс. руб)	Долг после начисления % (в конце года, тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	$S$	$1,5S$	$1,5S - x$
2	$1,5S - x$	$1,5^2S - 1,5x$	$1,5^2S - 1,5x - x$

Последняя ячейка - долг на конец 2 года. Значит, и на начало 3 года. Для простоты вычисления преобразуем это выражение, заменив  $S$  на 10 000 тыс. рублей:  $22500 - 2,5x$ . Далее воспользуемся таблицей для дифференцированных платежей.

№ года	Выплата основного долга	Выплата начисленных процентов	Общая выплата в год
3	$(22500 - 2,5x) * 0,5$	$(22500 - 2,5x) * 0,5$	$22500 - 2,5x$
4	$(22500 - 2,5x) * 0,5$	$(22500 - 2,5x) * 0,25$	$(22500 - 2,5x) * 0,75$

Таким образом, в первые два года было выплачено  $2x$  рублей, а в последующие два года  $(22500 - 2,5x) + (22500 - 2,5x) * 0,75$  рублей. По условию задачи общая сумма выплат должна быть 20 375 тыс. рублей. Имеем уравнение:  $2x + (22500 - 2,5x) + (22500 - 2,5x) * 0,75 = 20\,375$ .

Откуда  $x = 8000$  тыс. рублей, то есть 8 000 000 рублей, что и является первым платежом.

Ответ: 8 000 000 рублей.

**4.6**

Первый год обучения (на платной основе) в некотором ВУЗе стоит 60 000 рублей. Если Костя не поступит на бюджет, то в августе ему придётся взять кредит на обучение. Небанковская финансовая организация согласилась предоставить Косте кредит на необходимую сумму сроком на 4 месяца под 20% в месяц на следующих условиях:

- в сентябре и октябре кредит выплачивается равными ежемесячными платежами;
- в ноябре и декабре выплаты подбираются так, чтобы долг был на одну и ту же величину меньше, чем долг на начало предыдущего месяца.

Общая сумма выплат будет равна 84 800 рублей. Какую сумму необходимо будет выплатить в октябре, если Косте не удастся поступить в этот ВУЗ на бюджетной основе?

Ответ:

**4.7**

Под строительство завода был выдан кредит размером в 120 млн рублей на 4 года под 20% годовых. В первые два года кредит выплачивается равными ежегодными платежами. В последующие два года кредит выплачивается так, чтобы долг был на одну и ту же величину меньше, чем долг на начало предыдущего года. Общая сумма выплат будет равна 169,6 млн. рублей. По сколько рублей будет выплачено в первый и второй годы?

Ответ:

## ПОВТОРЕНИЕ

**1**

В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2030	Июль 2031	Июль 2032	Июль 2033	Июль 2034
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Ответ: 29 млн рублей.

**2**

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,8S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.

Ответ: 8 млн рублей.

**3**

31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на  $a\%$ ), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Ответ: 20%.

**4**

15-го января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на  $p\%$ ;
- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $p$ .

Ответ: 5%.

**5**

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 600 000 рублей на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 25 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 26 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составит долг на 15 число 25 месяца, если всего будет выплачено 691 000 рублей?

Ответ: 100 000 рублей.

## §5. БАНКИ: ВКЛАДЫ

**ПРИМЕР 1**

Миша и Маша положили в один и тот же банк одинаковые суммы под 10% годовых. Через год сразу после начисления процентов Миша снял со своего счета 5000 рублей, а еще через год снова внес 5000 рублей. Маша, наоборот, через год доложила на свой счет 5000 рублей, а еще через год сразу после начисления процентов сняла со счета 5000 рублей. Кто через три года со времени первоначального вложения получит большую сумму и на сколько рублей?

**РЕШЕНИЕ:**

Пусть для определенности Миша и Маша 15.01.12 положили в банк  $x$  рублей. Подготовим выписки из лицевых счетов Маши и Миши.

**Выписка из лицевого счета Маши.**

Дата операции	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	Остаток на счете (руб.)
15.01.12	Принято от клиента	$x$	$x$
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1,1x$
15.01.13	Принято от клиента	5000	$1,1x + 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1,1^2x + 5500$
15.01.14	Выдано клиенту	5000	$1,1^2x + 500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1,1^3x + 550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1,1^3x + 550$	0

**Выписка из лицевого счета Миши.**

Дата операции	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	Остаток на счете (руб.)
15.01.12	Принято от клиента	$x$	$x$
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1,1x$
15.01.13	Выдано клиенту	5000	$1,1x - 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1,1^2x - 5500$
15.01.14	Принято от клиента	5000	$1,1^2x - 500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1,1^3x - 550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1,1^3x - 550$	0

Итак, Маша получила на 1100 руб. больше, чем Миша.

Ответ: Маша; на 1100 рублей.

**5.1**

Близнецы Саша и Паша положили в банк по 50 000 рублей на три года под 10% годовых. Однако через год и Саша, и Паша сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 20 000 рублей и 15 000 рублей. У кого из братьев к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег? На сколько рублей?

Ответ:

**5.2**

В банк был положен вклад под 10% годовых. Через год, после начисления процентов, вкладчик снял со счета 2000 рублей, а еще через год снова внес 2000 рублей. Вследствие этих действий через три года со времени открытия вклада вкладчик получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций с вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы он получил?

Ответ:

**5.3**

Василий кладет в банк 1 000 000 рублей под 10% годовых на 4 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года после начисления процентов) на счет фиксированную сумму 133 000 рублей. Какая максимальная сумма может быть на счете у Василия через 4 года?

Ответ:

**5.4**

Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Спёрбанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение Спёрбанка. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, в котором процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Спёрбанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Спёрбанке Баба Валя сняла половину образовавшейся суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» и открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка, не теряя надежды на значительное улучшение своего материального благосостояния.

Надежды оправдались: через год сумма Бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела Баба Валя, что год назад в Спёрбанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако, подумала: «А где же мы не теряли?...» Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил Бабу Валию без денег.

А каков в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров?

Ответ:

**5.5**

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку  $a\%$  до  $(a + 40)\%$ ). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков новый процент годовых?

Ответ:

**5.6**

Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?

Ответ:

**5.7**

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Ответ:

**5.8**

Допустим, ты положил в банк тысячу рублей под двадцать процентов годовых. Какую сумму тебе нужно внести на этот же счёт в конце первого года (разумеется, после начисления процентов), чтобы в конце второго года сумма на твоём счёте была в три раза больше?

Ответ:

**5.9**

По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Ответ:

**5.10**

По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 21% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Ответ:

**5.11**

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5% в первый год и на одинаковое целое число  $n$  процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Ответ:

**5.12**

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на одинаковое целое число  $n$  процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Ответ:

**5.13**

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Ответ:

**5.14**

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвертый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 125 миллионов, а за четыре года станут больше 200 миллионов рублей.

Ответ:

**5.15**

Вклад планируется открыть на два года. Первоначальный вклад составит целое число миллионов рублей. В соответствии с условиями банка в конце каждого года вклад увеличивается на 15% по сравнению с его размером в начале года. В конце первого года после начисления процентов вклад пополнят на 15 млн рублей. Найдите размер первоначального вклада, если известно, что через два года вклад будет больше 37, но меньше 38 млн рублей.

Ответ:

**5.16**

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Ответ:

**5.17**

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик пополняет вклад на  $x$  млн рублей, где  $x$  — **целое** число. Найдите наименьшее значение  $x$ , при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 6 млн рублей.

Ответ:

**5.18**

В начале года  $5/6$  некоторой суммы денег вложили в банк А, а то, что осталось — в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определённый процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у. е., к концу следующего — 749 у. е. Если первоначально  $5/6$  суммы было бы вложено в банк Б, а оставшуюся вложили бы в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у. е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

Ответ:

**5.19**

Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определённый процент, свой для каждого банка. В начале года Степан положил 60% некоторой суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть суммы во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 000 рублей, а к концу следующего года 701 000 рублей. Если бы Степан первоначально положил 60% своей суммы во второй банк, а оставшуюся часть в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 000 рублей. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу второго года?

Ответ:

**5.20**

Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2018 года в банке счёт, на который он ежегодно кладёт 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2024 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Ответ:

**5.21**

Банк планирует вложить на 1 год 30% имеющихся у него средств клиентов в акции золотодобывающего комбината, а остальные 70% — в строительство торгового комплекса. В зависимости от обстоятельств первый проект может принести банку прибыль в размере от 32% до 37% годовых, а второй проект — от 22 до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 10% до 20% годовых. Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в покупку акций и строительство торгового комплекса может при этом получить банк.

Ответ:

## ПОВТОРЕНИЕ

1

15-го января был выдан кредит. В таблице представлен график его погашения

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05
Долг (в процентах от кредита)	100%	80%	60%	40%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 10%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?  
 Ответ: 28%.

2

31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?  
 Ответ: 506 250 рублей.

3

15-го января планируется взять кредит в банке на несколько месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев можно взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита будет на 25% больше суммы, взятой в кредит.  
 Ответ: 9 месяцев.

4

15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составит общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?  
 Ответ: 119%.

5

В июле 2036 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года.
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
- в июле 2037, 2038 и 2039 годов долг остается равным 6,6 млн. руб.
- суммы выплат 2040 и 2041 годов равны.

Найдите  $p$ , если в 2041 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн. рублей.  
 Ответ: 20%.

## §6. ОПТИМИЗАЦИЯ

### ФЕРМА

#### 6.1

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу – по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ:

#### 6.2

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га.

Фермер может продать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу – по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ:

#### 6.3

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу – по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ:

### ПЕРВОКЛАССНИКИ

#### 6.4

В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ:

#### 6.5

В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ:

#### 6.6

В 1-е классы поступает 39 человек: 30 мальчиков и всего 9 девочек. Их распределили по двум классам: в 1а должно получиться 20 человек, а в 1б – 19 человек. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ:

## СТРОИТЕЛЬСТВО И ПРОИЗВОДСТВО

## 6.7

Строительство нового завода подделок iPhone стоит **75** млн. рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. смартфонов на таком заводе равны  $0,5x^2 + x + 7$  млн. рублей в год. Если смартфоны продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль владеющей заводом фирмы (в млн. рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + x + 7)$ . Когда завод построят, фирма будет выпускать телефоны в таком количестве, чтобы прибыль была самой-пресамой большой. А цена смартфона должна быть как можно ниже. При каком наименьшем значении  $p$  строительство окупится не более чем за **3** года?

Ответ:

## 6.8

Производство  $x$  тыс. единиц продукции обходится в  $q = 0,5x^2 + 7x + 12$  млн. рублей в год. При цене  $p$  тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет  $px - q$ . При каком наименьшем значении  $p$  через четыре года суммарная прибыль может составить не менее **344** млн. рублей?

Ответ:

## 6.9

Строительство нового завода стоит **122** млн. рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. единиц продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 - 2x + 10$  млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 - 2x + 10)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей.

При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за **4** года?

Ответ:

## 6.10

Строительство нового завода стоит **115** млн. рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. единиц продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + x + 9$  млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль владеющей заводом фирмы (в млн. рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + x + 9)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей.

При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за **5** лет?

Ответ:

## 6.11

Строительство нового завода стоит **78** млн. рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. ед. продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + 2x + 6$  млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей.

При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за **3** года?

Ответ:

## 6.12

Производство  $x$  тыс. единиц продукции обходится в  $q = 0,5x^2 + 2x + 5$  млн. рублей в год. При цене  $p$  тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн. рублей) составляет  $px - q$ . При каком наименьшем значении  $p$  через четыре года суммарная прибыль составит не менее **52** млн. рублей?

Ответ:

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОЧЕЙ СИЛЫ

### 6.13

В распоряжении командира клоунов имеется отряд клоунов в составе 33 человек. Их нужно распределить на два мероприятия, которые проходят в разных районах города. За день на первом мероприятии  $t$  клоунов получают  $2t^2$  д.е. за то, что веселят кучу детей. На втором мероприятии надо ещё и шарик надуть, поэтому  $t$  клоунов за день получают  $3t^2$  д.е. Командиру клоунов не важно: хорошо ли пройдут мероприятия. Главное – как можно меньше заплатить клоунам.

Какое минимальное количество денежных единиц придется выплатить клоунам за этот день?

Ответ:

### 6.14

В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $4t^2$  у.е. Если на втором объекте работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $t^2$  у.е.

Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у.е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Ответ:

### 6.15

В распоряжении прораба имеется бригада рабочих в составе 35 человек. Их нужно распределить на строительство двух частных домов, находящихся в разных городах. Если на строительстве первого дома работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $7t^2$  д.е. Если на строительстве второго дома работает  $t$  человек, то их суточная зарплата составляет  $3t^2$  д.е.

Какое минимальное количество денежных единиц придется выплатить рабочим за сутки?

Ответ:

### 6.16

Представь, что ты владелец двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на любом из твоих заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, ты платишь рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей (у них есть профсоюз).

Ты готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на двух твоих заводах?

Ответ:

### 6.17

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ:

### 6.18

Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ:

**6.19**

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $3t$  единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $4t$  единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ:

**6.20**

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $2t$  единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $5t$  единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ:

**6.21**

Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно  $4t^3$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно  $t^3$  часов в неделю, они производят  $t$  приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ:

**6.22**

В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

Ответ:

**6.23**

В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

Ответ:

**6.24**

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

Ответ:

**6.25**

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Ответ:

**6.26**

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ:

**6.27**

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ:

**6.28**

В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ:

**6.29**

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ:

**6.30**

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ:

## РАССТОЯНИЯ

**6.31**

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?

Считайте, что перекресток не Т-образный, обе дороги продолжают за перекрестком.

Ответ:

**6.32**

Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и 3,5 км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

Ответ:

**6.33**

Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 88 км к северу и 132 км к востоку от метеостанции, а во время второго измерения находился в 44 км строго к востоку от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

Ответ:

**6.34**

Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью  $v$  км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение  $v$ , при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

Ответ:

**ВКЛАДЫ И ЦЕННЫЕ БУМАГИ****6.35**

Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%.

В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ:

**6.36**

Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%.

В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ:

**6.37**

В начале 2021 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%.

В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ:

**6.38**

Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года  $t$  становится равной  $t^2$  тыс. руб. (т.е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго акции стоят 4 тыс. руб., к концу третьего – 9 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых.

В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Ответ:

**6.39**

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $10t$  тыс. рублей в конце года  $t$ . В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 24%.

В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Ответ:

**6.40**

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят  $t^2$  тыс. рублей в конце года  $t$ . В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в  $(1+a)$  раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года.

При каких положительных значениях  $a$  это возможно?

Ответ:

## ОТЕЛИ

**6.41**

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Ответ:

**6.42**

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Ответ:

## ТОВАРЫ И НАЛОГИ

**6.43**

Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 15\,000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15\,000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют:  $3\,000 \cdot Q + 1\,000\,000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 10\,000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 3\,000 \cdot Q - 1\,000\,000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Ответ:

**6.44**

Зависимость количества  $Q$  (в шт.,  $0 \leq Q \leq 20\,000$ ) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 20\,000 - P$ . Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют:  $6\,000 \cdot Q + 4\,000\,000$  рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог  $t$  рублей ( $0 < t < 10\,000$ ) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет  $PQ - 6\,000 \cdot Q - 4\,000\,000 - tQ$  рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна  $tQ$  рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении  $t$  общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Ответ:

**6.45**

Зависимость объёма  $Q$  (в шт.) купленного у фирмы товара от цены  $P$  (в руб. за шт.) выражается формулой  $Q = 15\,000 - P$ ,  $1\,000 \leq P \leq 15\,000$ . Доход от продажи товара составляет  $PQ$  рублей. Затраты на производство  $Q$  единиц товара составляют  $3\,000 \cdot Q + 5\,000\,000$  рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Ответ:

**ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР В БАНКЕ****6.46**

Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн. руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную.

Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Ответ:

**6.47**

Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 2 млн. руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 260% превышающую исходную.

Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды – 14 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За сколько месяцев в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Ответ:

**6.48**

В январе 2020 года ставка по депозитам в Газпрёмбанке составляла  $x\%$  годовых, тогда как в январе 2021 года она составила  $y\%$  годовых, причем известно, что  $x + y = 30$ . В январе 2020 года вкладчик открыл счет в Газпрёмбанке, положив на него некоторую сумму. В январе 2021 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой (изначальной) суммы. Укажите значение  $x$  при котором сумма на счету вкладчика в январе 2022 года стала бы максимально возможной.

Ответ:

**6.49**

В январе 2020 года ставка по депозитам в Газпрёмбанке составляла  $x\%$  годовых, тогда как в январе 2021 года она составила  $y\%$  годовых, причем известно, что  $x + y = 30$ . В январе 2020 года вкладчик открыл счет в Газпрёмбанке, положив на него некоторую сумму. В январе 2021 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть текущей суммы счёта. Укажите значение  $x$  при котором сумма на счету вкладчика в январе 2022 года стала бы максимально возможной.

Ответ:

**6.50**

Саша положил некоторую сумму в банк на 4 года под 10% годовых. Одновременно с ним Паша такую же сумму положил на два года в другой банк под 15% годовых. Через два года Паша решил продлить срок вклада еще на 2 года. Однако к тому времени процентная ставка по вкладам в этом банке изменилась и составляла уже  $p\%$  годовых. В итоге через четыре года на счету у Паши оказалась большая сумма, чем у Саши, причем эта разность составила менее 10% от суммы, вложенной каждым первоначально. Найдите наибольшее возможное целое значение процентной ставки.

Ответ:

## ПОВТОРЕНИЕ

1

В июле 2036 года планируется взять кредит в банке на три года в размере  $S$  млн рублей, где  $S$  — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей

таблицей

Месяц и год	Июль 2036	Июль 2037	Июль 2038	Июль 2039
Долг (в млн рублей)	$S$	$0,6S$	$0,25S$	0

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.

2

В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Ответ: 316 800 рублей.

3

В июле 2032 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— в январе 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2036, 2037 и 2038 годов долг возрастает на  $p\%$  по сравнению с концом предыдущего года;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2038 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно  $p$ , если общая сумма выплат составит 840 тыс. рублей?

Ответ: 15%.

4

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

Ответ: 5 млн рублей.

5

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.